



Ime in priimek avtorja: Alenka Lipovec
Institucija: Pedagoška fakulteta Maribor

Naslov gradiva: Blatno mesto

Strategija (metoda): optimizacija rešitve

Starostna skupina, razred (ali letnik in vrsta SŠ): drugo triletnje OŠ

Kompetence, ki se razvijajo:

a) generične:

Aktivnost pokriva 9 generičnih kompetenc ne pokriva pa 10. generične kompetence. Razvija torej sposobnost zbiranja informacij, analize in organizacije informacij, interpretacije, sinteze zaključkov, učenja in reševanja problemov, prenos teorije v prakso, uporaba matematičnih idej in tehnik, prilagajanje novim situacijam, skrb za kakovost, samostojno in timsko delo, organiziranje in načrtovanje dela, verbalna in pisna komunikacija, medsebojna interakcija, primarno pa ne razvija generične kompetence varnost, čeprav je aktivnost možno prilagoditi s pogovorom o prometni varnosti tudi za pokrivanje te kompetence.

b) predmetno-specifične:

Aktivnost razvija 11 matematičnih kompetenc, ki vplivajo na razvoj naravoslovne kompetenc in sicer: razvoj matematičnega mišljenja; oblikovanje matematičnih pojmov, struktur, veščin in procesov; povezovanje znanja znotraj matematike in tudi širše; uporaba različnih matematičnih postopkov in tehnologij; spoznavanje uporabnosti matematike v vsakdanjem življenju; spoznavanje matematike kot procesa; razvijanje kreativnosti, ustvarjalnosti in natančnosti; razvijanje zaupanja v lastne (matematične) sposobnosti; razvijanje odgovornosti in pozitivnega odnosa do dela in matematike; spoznavanje pomena matematike kot univerzalnega jezika; sprejemanje in doživljanje matematike kot kulturne vrednote.

c) Dodatne

Aktivnost dodatno razvija ključno kompetenco samoiniciativnosti in podjetnost.

Umestitev v učni načrt/Nova vsebina: Aktivnost dosega naslednje splošne cilje pouka matematike, navedene v Učnem načrtu (1998): matematika kot sredstvo komunikacije, matematika kot orodje v vsakdanjem življenju, sistematično in kreativno delo, poglobljanje matematičnega znanja (pomembnih matematičnih vsebin, procesov in nadzornih znanj), razvijanje zaupanja v lastne matematične sposobnosti, poznavanje pomembnih matematičnih tehnologij. Med operativnimi cilji dosega cilje sklopa Druge vsebine, podsklopa Obdelava podatkov in podsklopa Logika in jezik, sega pa tudi na področje ciljev sklopa Merjenje in Računske operacije ter Številski izrazi. Natančnejši pregled ciljev po razredih je naveden v tabeli 1.

| Razred | Cilji: |
|-----------|---|
| 3. razred | oceniti, primerjati, meriti in zapisati količine z merskim številom ter enoto; računati z enoimenskimi merskimi enotami; meriti s standardnimi in nestandardnimi enotami; seštevati in odštevati v množici naravnih števil do 100; izračunati vrednost številskega izraza z upoštevanjem vrstnega reda računskih operacij; rešiti preprost problem, ki zahteva, da učenec zbere in uredi podatke in jih tudi čim pregledneje predstavi ter prebere. |
| 4. razred | meriti z izbrano enoto (z nestandardnimi in standardnimi enotami; primerjati dve količini in računati s količinami; seštevati in odštevati do 1000; oceniti rezultat; sklepati iz enote na množino; |
| 5. razred | meriti z nestandardnimi in standardnimi enotami; seštevati in odštevati v obsegu do milijona; pred štetjem znati smiselno opredeliti razrede razvrščanja (kategorije, uporabiti preproste, a zanesljive tehnike štetja. |
| 6. razred | oceniti rezultat in izračunati natančno vrednost; zapisati in zanesljivo izračunati vrednost številskega izraza z žepnim računalom; seštevati in odštevati decimalna števila. |



Način evalvacije:

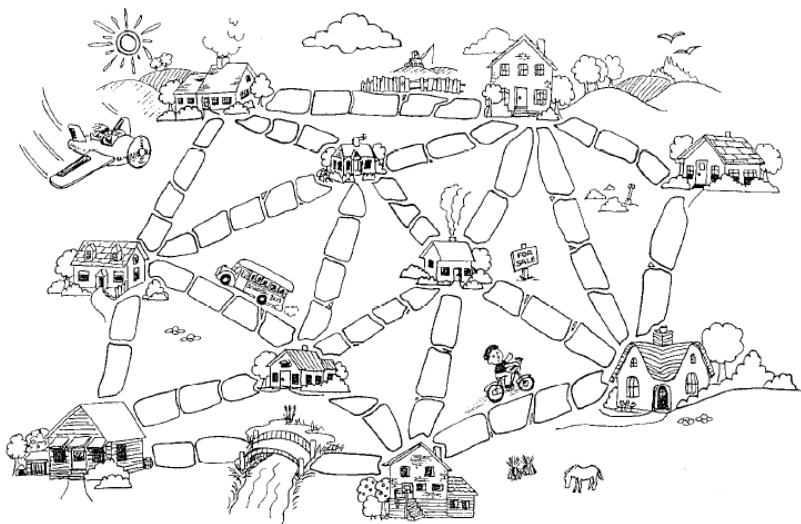
- 1) Preverjanje doseganja ciljev s pregledom izdelkov učencev.
- 2) Evalvatorjeva refleksija

Ali so učenci dosegli cilje lekcije? Kateri argument potrjujejo to trditev? Kakšne spremembe bi bile potrebne, da bi bila lekcija še bolj učinkovite?

Ali so bili učenci sposobni razložiti svoje sklepanje na jasn in logičen način?
Katere dodatne razširitve aktivnosti so še možne?

Opis problema:

V Blatnem mestu (kot primer zemljevida glej sliko 1) želijo prebivalci asfaltirati ceste.



Vir: www.google.com/educators/activities/unpluggedTeachersDec2006.pdf

Slika 1: Blatno mesto

Župan mesta vztraja na tem, da nekatere ceste morajo biti asfaltirane in da je ta težava prednostna. Asfaltirali bodo toliko cest, da bo vsak lahko prišel kamorkoli. Vseeno jim je tudi, če je pot potovanja po asfaltirani cesti zato daljša. Ne želijo velikih stroškov. Asfaltiranih mora biti toliko cest, da lahko vsakdo potuje od svoje hiše do katerekoli druge hiše v mestu. Toda asfaltiranje mora biti opravljeno z minimalnimi stroški, ker bo preostanek mestnega sklada uporabljen za izgradnjo mestnega plavalnega bazena. Težavi sta v tem, kako pripraviti shemo asfaltiranja, da bo takšna, kot si jo želijo prebivalci in , kako povezati mesto z mrežo asfaltiranih cest, upoštevajoč minimalne stroške asfaltiranja. Cena asfaltiranja je izračunana s seštevanjem izbranih cest za asfaltiranje.

Rešitev problema: matematično gledano gre za problem iz teorije grafov. Grafi so strukture, ki jih sestavljajo točke in povezave. Če struktura ne vsebuje krožnih poti, se tak graf imenuje drevo. V našem problemu iščemo minimalno vpeto drevo povezanega obteženega grafa.



To pomeni, da iščemo podmnožico povezav, ki tvori najcenejše drevo tj. povezuje vse hiše brez krožnih poti.

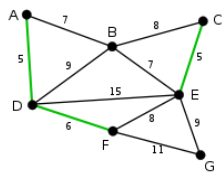
Rešitev lahko vedno najdemo z uporabo Kruskalovega algoritma (http://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal's_algorithm) :

- Ustvari gozd F (množico dreves), kjer je vsaka točka (hiša) drevo
- Ustvari množico S , ki jo sestavljajo vse povezave v grafu
- Dokler je S neprazna:
 - Odstrani najcenejšo povezavo iz S
 - Če ta povezava povezuje dve različni drevesi, jo dodaj gozdu F in s tem dve drevesi poveži v eno,
 - V nasprotnem primeru povezavo zavrz.

Primer:

| Slika | Opis | Slika | Opis |
|-------|--|-------|--|
| | Recimo, da pričnemo z zemljevidom na sliki. Števila zraven povezav označujejo ceno. Nobena povezava ni izbrana. | | Naslednji najcenejši povezavi sta AB in BE , obe imata ceno 7. Povezava BD je obarvana rdeče, ker bi z izbiro te povezave nastala krožna pot ADB . Povezave BD torej ne izberemo. |
| | AD in CE sta najcenejši povezavi. Vseeno je, katero izmed njiju izberemo. Izbrali bomo AD . | | Izberemo BE in izločimo (obarvamo z rdečo) povezave: BC ker nastane krožna pot BCE , DE ker nastane krožna pot DEBA , in FE ker nastane krožna pot FEBAD . |
| | Sedaj je CE najcenejša povezava, ki ne tvori krožne poti, zato jo izberemo. | | Zaključimo s povezavo EG dolžine 9. Našli smo najcenejše vpeto drevo. |



| | | | |
|---|---|--|--|
|  | <p>Povezava DF je izbrana v tem koraku, ker je najkrajša izmed preostalih povezav in ne ustvari krožne poti.</p> | | |
|---|---|--|--|

Opomba: Zapis s simboliko tipa AB je možen le, če vozlišči povezuje daljica. Na npr. Sliki 6 vozlišč ne povezuje črta in zato je potrebno ali sliko prerisati z uporabo ravnila ali pa uporabiti kakšno drugo simboliko npr. A-B za povezavo med dvema vozliščema.

Ko takšen problem postavimo pred učence v prvem ali drugem triletju, učitelj niti ne pričakuje niti ne spodbuja rešitve v smislu posplošenega algoritma. Tisto, kar je pomembno je, da so učencem predstavljene verjetne in privlačne problemske zgodbe, ki zagotavljajo reševanje skozi igro.

Ko takšen problem postavimo pred učence v prvem ali drugem triletju, učitelj niti ne pričakuje niti ne spodbuja rešitve v smislu posplošenega algoritma. Tisto, kar je pomembno je, da so učencem predstavljene verjetne in privlačne problemske zgodbe, ki zagotavljajo reševanje skozi igro.

Metodični napotki za učitelja

V literaturi najdemo, da nekateri 5-letniki pričnejo s tem, kje naj bi bil postavljen nov plavalni bazen v mestu in kateri vozel predstavlja njihovo hišo! Torej, če je razred soočen s takšnim problemom, ga rešuje z aktivnostjo. Nekateri učenci hitro razumejo problem, nekateri pa potrebujejo nadaljnjo razlago, da bodo lažje prišli do rešitve. Vedno spodbudimo tiste učence, ki problem razumejo, da ga razložijo tistim, ki ga še ne razumejo. Večkrat se izkaže, da učenci, ki se dobro odrežejo pri tem problemu, niso nujno najboljši pri klasičnih matematičnih nalogah.

Včasih se zgodi, da učenci iščejo najkrajšo pot in potrebujejo dodatno razlago. Včasih učenci izberejo poljubno hišo in od nje nadaljujejo po najcenejši poti. Pri tem uporabljajo algoritme, ki so podobni Kruskalovem algoritmu. Nekateri pričnejo dodajati cenejše ceste, nekateri odstranjujejo dražje ceste, nekateri poiščejo hiše, iz katerih izhaja mnogo poti. Običajno pa otroci kombinirajo več strategij. Nujno je, da je učencem med reševanjem problema omogočena diskusija znotraj skupine. Naravna vprašanja, ki se pojavljajo pri reševanju tega problema, so bogata, raznolika in vključujejo skrbi in dvome kot pr. Kako lahko na hitro poveš, da je predlagana shema



asfaltiranja dobra? Kako lahko določimo katera rešitev je boljša? Katero je minimalno število asfaltiranih ulic pri optimalni rešitvi?

Gradivo lahko uporabimo kot izhodiščno problemsko situacijo za sestavljene račune. Učenci namreč namesto računa $3+3+3+4+3+4$ intuitivno zapišejo $4 \cdot 3 + 2 \cdot 4$. V tem primeru zasledujemo tudi klasične operativne cilje sklopa Številski izrazi.

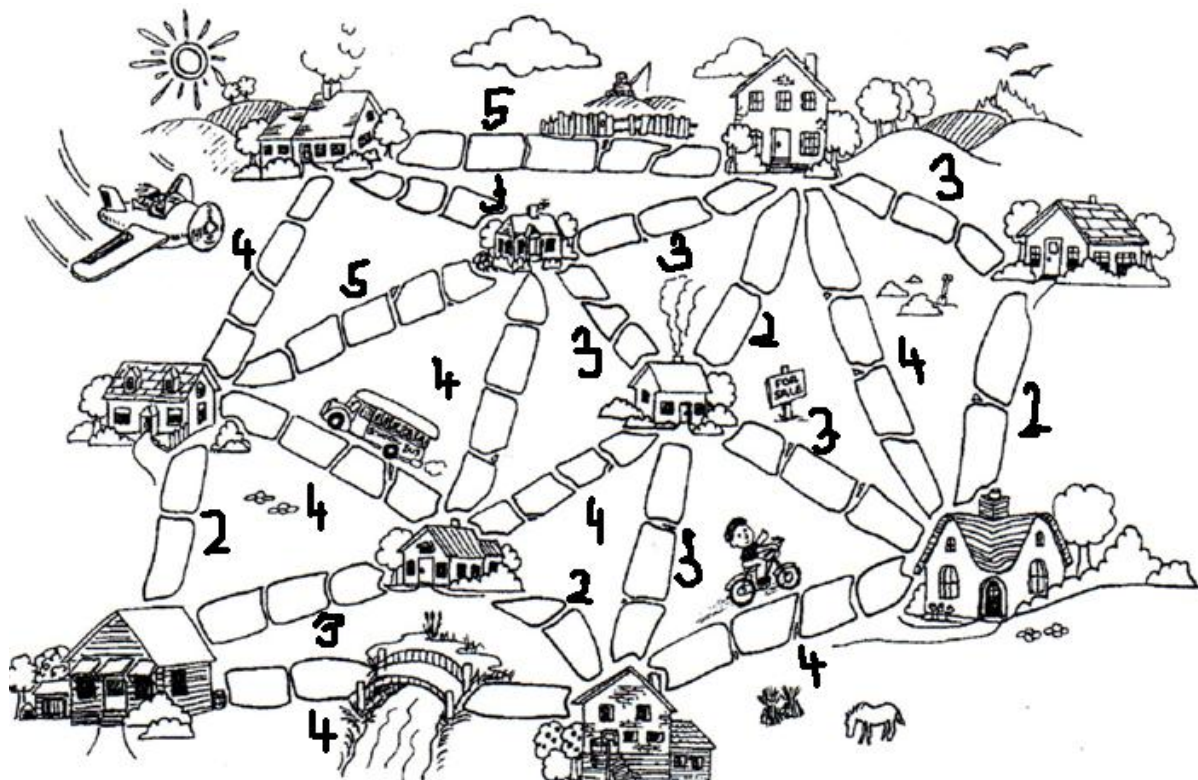
1. SREČANJE

Otrokom predstavimo situacijo blatnega mesta tako, da pričnejo razmišljati o problemu, kako hudo je, če je vsak dan blato ko stopi iz hiše in so umazani. Predstavimo stisko prebivalstva-avtomobili se ugrezajo v blato po nevihti. *Učenci a si predstavljajte, kako bi naše ceste bile iz peska? A bi se lahko rolali? Vozili s kolesi? Kaj bi počeli, če bi bilo tako? Kolesa od avtomobilov, koles, rolerjev, skuterjev bi se nam ugrezala. Kaj bi naredili vi, da ne bi bilo več blata, ko bi deževalo? Pomembno je, da otroke postavimo v ta problem in da se vživijo v to situacijo... poskusimo, da ne pridemo do pravilnega odgovora prehitro (asfaltiranje).*

V Blatnem mestu živijo zelo žalostni ljudje. Vedno, ko zapade dež se jim avtomobili ugrezajo v blato. Temu bi radi naredili konec, zato skličejo sestanek z županom mesta. Župan mesta ve, da je treba nekatere ceste asfaltirati, vendar denarja za asfaltiranje vseh cest ni.

Rekel jim je, da mora biti asfaltiranih toliko cest, da lahko vsak potuje po asfaltirani cesti od svoje hiše, do katerekoli druge v mestu, toda asfaltiranje more biti opravljeno z minimalnimi stroški, ker bo preostanek denarja uporabljen za izgradnjo novega mestnega bazena. Vseeno jim je tudi, če je pot potovanja po asfaltirani cesti daljša. Pomembno je, da pomagamo prebivalcem Blatnega mesta rešiti to težavo, da bodo ponovno srečni.

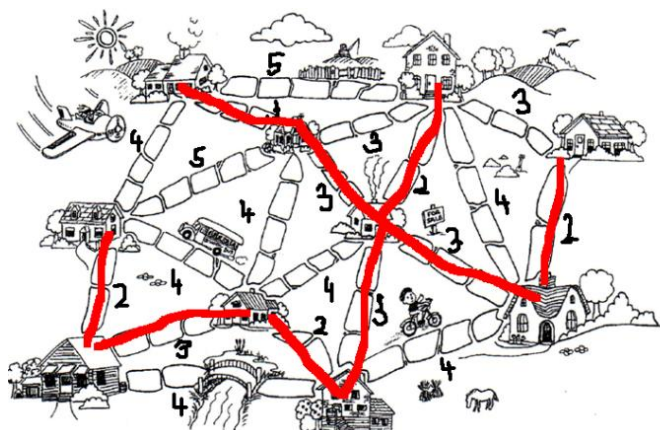
Številke na zemljevidu Blatnega mesta (slika 2) prikazujejo stroške za izgradnjo posamezne ceste. Najcenejša je pot, ki stane 2 enoti in najdražja stane 5 enot.



Slika2: zemljevid z označenimi cenami

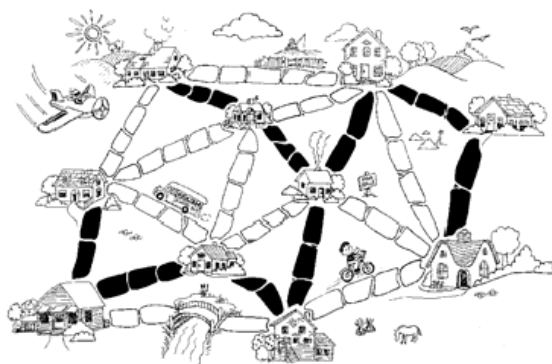
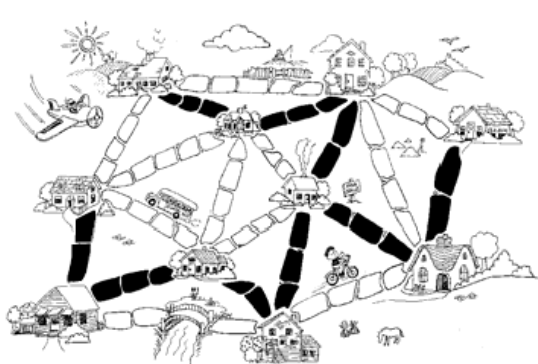
Učitelj ceno enote prilagodi številskemu obsegu, ki ga učenci zelo dobro obvladajo (običajno ostajamo v obsegu do 100 ne glede na razred). V 6. Razredu je možno cene zastaviti tudi z decimalnimi številkami. Seveda pa se učitelj mora zavedati, da bo problem s tem izgubil del konceptualne naravnosti, ker bodo učenci del energije usmerjali v računanje. Morda bi jim zato lahko, vsaj v 6. razredu, če ne že prej, v pomoč ponudili kalkulatorje.

Če vreme dopušča, zemljevid 1 blatnega mesta prerišemo na asfaltno površino, sicer zemljevid le povečamo do te mere, da se učenci lahko po njem sprehajajo. Povemo, da bomo ceno asfaltiranja izračunali preko razdalj, ki ločijo hiše, šole itd. Ena enota je en odsek (lahko je tudi mostiček ipd.). Število enot učenci zapišejo na listke in jih položijo na zemljevid. Nato pričnejo z »asfaltiranjem«, ki poteka z zbiranjem listkov enot oz. cen. Ko so »asfaltirali« pot tako, da lahko do vsake hiše prispemo po asfaltni cesti, cene seštejejo. Morda dobijo optimalno rešitev, morda tudi ne (ena izmed neoptimalnih rešitev je prikazana na naslednji sliki 3)



Slika3: Povezane so vse hiše, a asfaltiranje ni najcenejše.

Vsote primerjajo med seboj in se o tem pogovarjajo. Na sliki 4 sta dve od možnih optimalnih rešitev

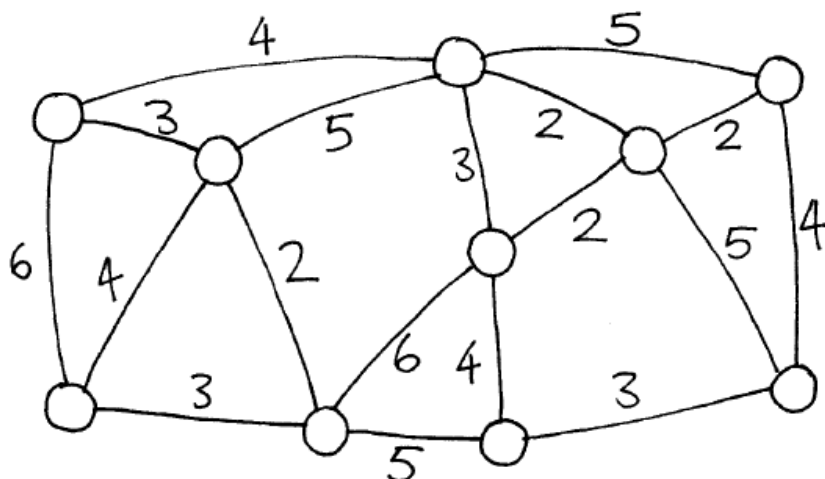


Slika 4: Dve možni optimalni rešitvi.

Spodbujamo pogovor v smeri optimizacije tj. Kako izbrati ceste za asfaltiranje, da bo cena čim manjša. Koliko cest potrebujemo, da povežejo 10 hiš na zemljevidu? Morda bodo ugotovili, da vedno zadošča 8 cest, morda tudi ne. Ali je smiselno pričeti s cestami, ki so poceni ali s tistimi, ki vodijo do mnogo hiš? Kaj bi se zgodilo, če bi nekatere drage ceste zbrisali. Bi še vedno lahko obiskali vse hiše, kje bi bilo to možno in kje ne?

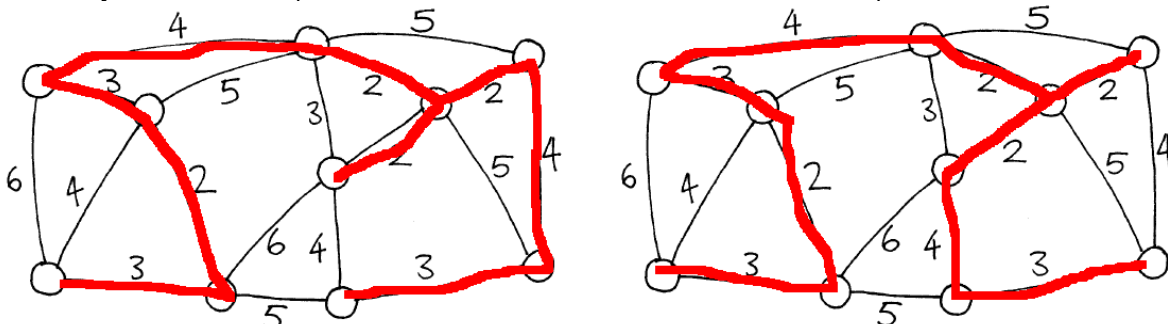
2. SREČANJE

Učencem ponovno damo zemljevid (slika5), le da nanj tokrat napišejo cene in ceste, ki jih izberejo, pobarvajo. Tudi zemljevid je drugačen. Oblikovan je kot graf tj. sestavljajo ga točke in povezave.



Slika 5: Zemljevid v obliki grafa.

Znova je možnih optimalnih rešitev več, na sliki 6 sta prikazani samo dve.



Slika 6: Dve optimalni rešitvi.

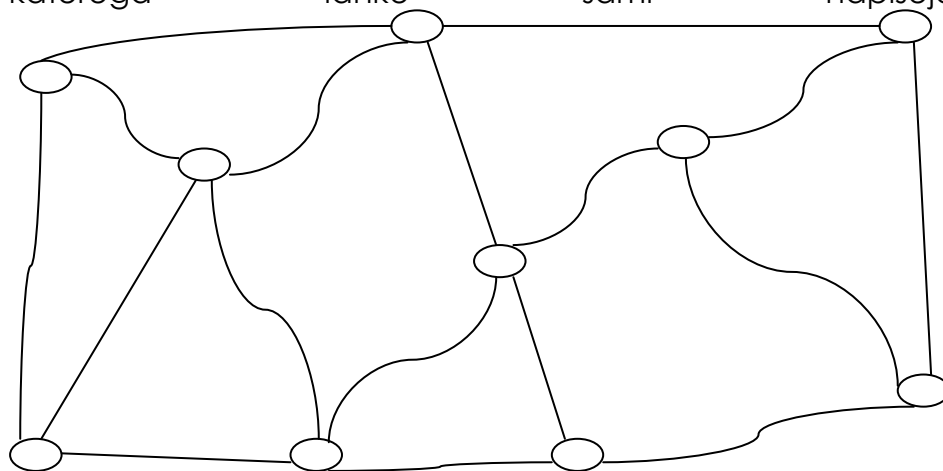
Skozi pogovor poskušamo tabelarično prikazati nastanek rešitve (primerjaj opis Kruskalovega algoritma). Oglejmo si primer izdelka, ki bi lahko nastal

| Slika | Opis |
|-------|---|
| | <p>Izberemo povezave HI, GH, DH in CE, ker so najcenejše.</p> |



| | |
|--|--|
| | <p>Izberemo še AC, BE in FJ, ker so po vrsti te sedaj najcenejše. GD ne izberemo, ker sta točki g in E že povezani preko H.</p> |
| | <p>Sedaj gledamo povezave, ki stanejo 4 enote. Izberemo npr. IJ (lahko bi izbrali tudi FG). Izberemo tudi AD. BC ne izberemo, ker sta točki B in C že povezani preko E.</p> <p>Sedaj izračunamo: $4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 25$</p> |

Ko se strinjamo, da je optimalno rešitev 25, jim damo nov zemljevid (slika7), na katerega lahko sami napišejo cene.



Slika7: Zemljevid brez cen.

Ponovno poiščejo optimalno rešitev. Pogovarjamo se o tem kako so izbirali cene.

3. SREČANJE

Tokrat lahko sami narišejo zemljevid in nanj napišejo cene. Pogovarjamo se, kje vse v življenju se lahko pojavi podoben problem (pošta, televizija, oskrbovalne poti za vire energije npr. elektriko, plin, vodo, intervencijske poti,...). Pogovarjamo se tudi o tem kakšne strategije so uporabili pri reševanju problema, ki so ga reševali nazadnje (slika 7). Dogovorimo se, da mora spis vsebovati vse korake reševanja (iskanje primernih poti, izračunavanje cene,



REPUBLIKA SLOVENIJA

MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

www.mss.gov.si, e: gp.mss@gov.si
Masarykova 16, 1000 Ljubljana
t: 01 400 54 00, f: 01 400 53 21



Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad



iskanje boljše rešitve). Spodbujamo jih, da točke označijo s črkami (začetnicami imen svojih prijateljev). V spisu mora v vsakem koraku biti zapisano zakaj so se odločili izvesti korak (Zakaj smo izbrali pot, ki je označena z zeleno - zato, ker je bila poceni). Spis naj vključuje tudi račune in slike. Učence oskrbite z manjšimi slikami, da jih bodo v spis le vstavljali (lepili). Učenci znova napišejo spis o reševanju problema blatno mesto.



Gradivo za učence

1. srečanje

BLATNO MESTO

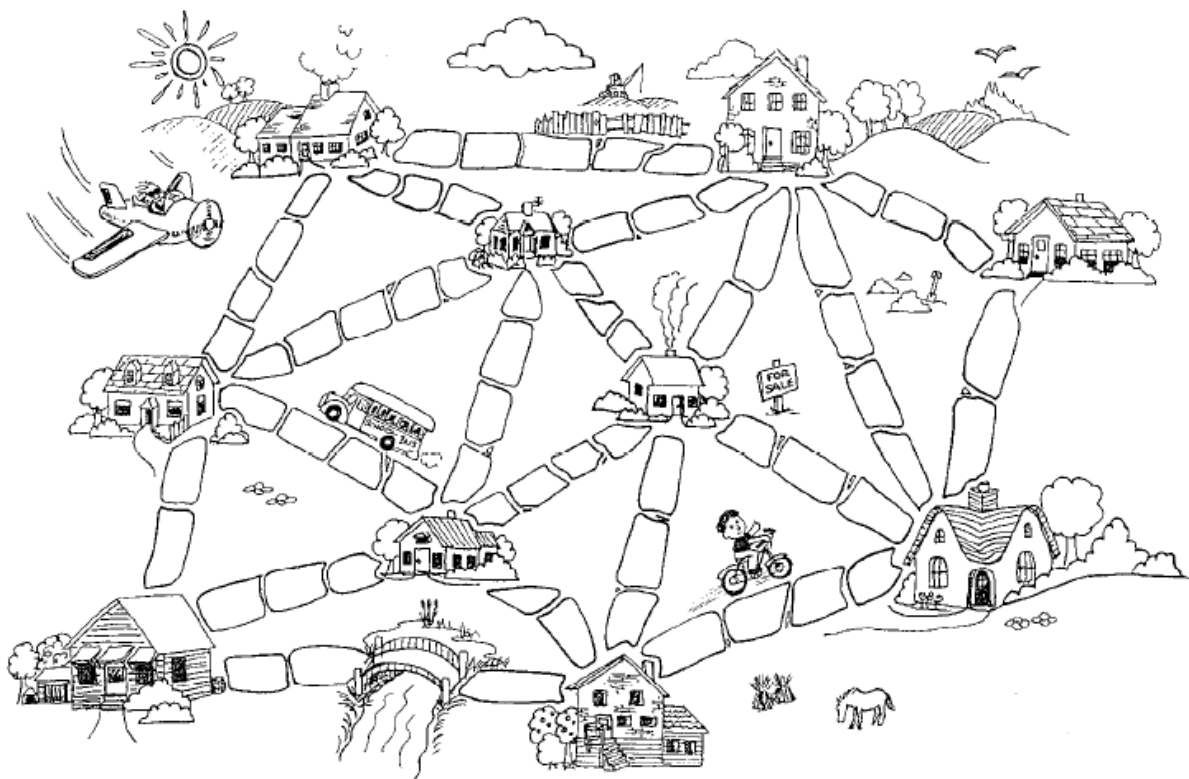
Nekoč, nekje je bilo mesto brez asfaltiranih cest. Potovanje po mestu je bilo posebej težavno po nevihtah, ker je bilo vse blatno. Zato so se avtomobili vdiral v blato in ljudje so bili popolnoma umazani. Župan mesta se je odločil, da je potrebno nekatere ceste asfaltirati, vendar ni želel porabiti več denarja kot bi bilo nujno potrebno. Mesto je namreč želelo zgraditi plavalni bazen. Zato je župan postavil dva pogoja:

Asfaltirati je potrebno toliko cest, da bo vsak lahko po njih prišel do koderkoli v mestu.

Asfaltiranje naj stane čim manj.

Pred tabo je zemljevid mesta. Število kamnov med hišami predstavlja ceno asfaltiranja te poti. Poišči najboljšo možno asfaltiranje.

Katere strategije si uporabljal pri reševanju tega problema?





2. srečanje

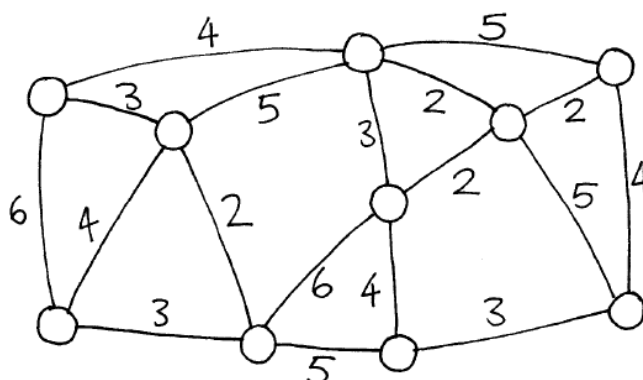
Internetne povezave

Tokrat boš polagal kable za internetno povezavo. Znova morajo vse točke povezavo dobiti in seveda, celotno omrežje naj bo zgrajeno s čim manj stroški.

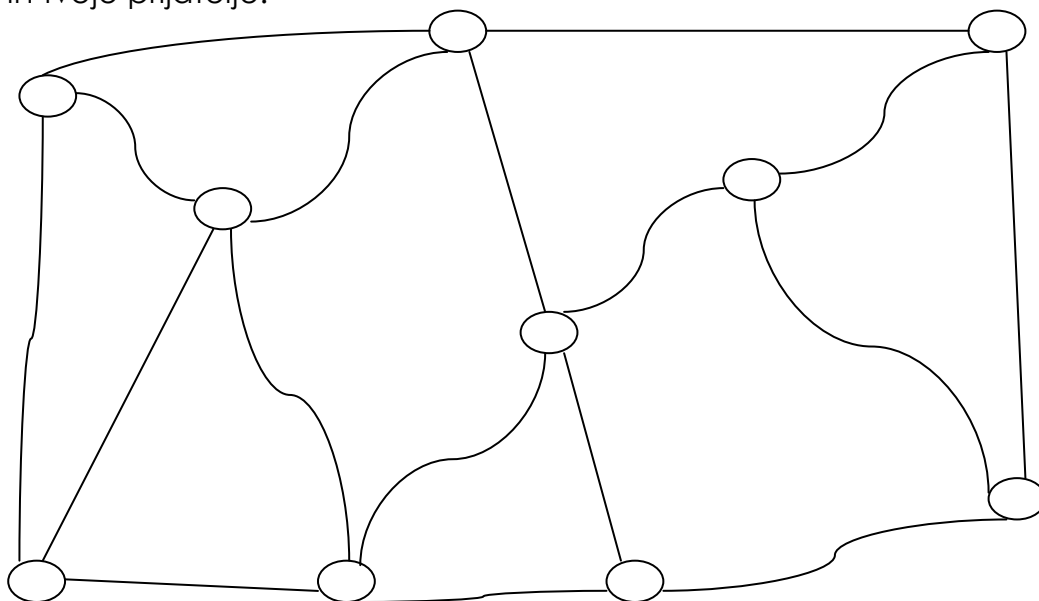
| Slika | Rešitev |
|-------|---------|
| | |
| | |
| | |
| | |



Na spodnji sliki označi tisto rešitev, ki se ti zdi najcenejša. Preveri ali povezuje vse hiše!



Sedaj lahko še sam zastaviš cene na svojem omrežju, ki bo povezovalo tebe in tvoje prijatelje.





3. srečanje

Rešuj nalogo o internetnem omrežju, ki si jo zastavil na prejšnjem srečanju.
Obkroži najboljšo izmed rešitev.

| Slika | Rešitev |
|-------|---------|
| | |
| | |
| | |

Zapiši svoja razmišljanja ob reševanju naloge. Kako si nalogo reševal? Ali si sodeloval s sošolci? Kako si se ob tem počutil? Kakšne podobne naloge bi si še lahko zastavili?



REPUBLIKA SLOVENIJA

MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

www.mss.gov.si, e: gp.mss@gov.si
Masarykova 16, 1000 Ljubljana
t: 01 400 54 00, f: 01 400 53 21



Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad



4. Literatura:

Fellows, M. R. (1993). Computer science and mathematics in the elementary schools, v N.D. Fisher, H.B. Keynes & P.D. Wagreich (Ur.) *Mathematicians and Education Reform 1990-1991*. Amer. Math. Society.

<http://csunplugged.org/>

Novak, L. (2007). *Teorija grafov v prvih dveh triletjih osnovne šole*. Diplomsko delo. Maribor: Pedagoška fakulteta.